

ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.63

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ТРЕХКРИТЕРИАЛЬНОГО УРАВНИВАНИЯ
НИВЕЛИРНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙканд. техн. наук, доц. В.В. ЯЛТЫХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Многокритериальное уравнивание геодезических сетей (МК-метод) применяется с 1999 года. Теория этого способа разработана и наиболее полно изложена для случая двухкритериального уравнивания. С 2010 года для получения более существенного эффекта МК-метода по сравнению с двухкритериальным для уравнивания плановых и высотных геодезических сетей применяется трехкритериальная оптимизация. Её эффективность практически доказана для сетей на плоскости. Преимущества новой методики уравнивания исследуется в настоящей статье на двух тестовых примерах нивелирных геодезических сетей. Исследования были проведены с применением шести новых программных продуктов: niva 44...niva 49. При этом программа niva 44 не является новой, но внутри нее проведены изменения, что привело к скорректированным результатам уравнивания.

Введение. Уравнивание нивелирных геодезических сетей, как правило, выполняется по методу наименьших квадратов (МНК). Однако локальные сети при ограниченной выборке измерений можно уравнивать МК-методом. В работах [3; 4] на двух тестовых примерах доказана эффективность двухкритериального метода уравнивания. Выяснилось, что ошибки высотного положения пунктов в слабом месте сети в 1,4...3,0 раза меньше, чем для МНК. В статье исследуется трехкритериальная оптимизация нивелирных сетей. Сущность этого метода заключается в следующем.

Основная часть. При уравнивании нивелирных геодезических сетей используются следующие критерии:

- *однокритериальная оптимизация*

$$\Phi_1 H = \left(|L H|^{\frac{n}{2}} \right)^T P_n |L H|^{\frac{n}{2}}, \quad (1)$$

где $L(H)$ – вектор свободных членов параметрических уравнений; n – степень (при $n = 2$ имеем метод наименьших квадратов (МНК), при $n = 1$ получим метод наименьших модулей (МНМ)) для случая

Лр-оценок; $P_{ni} = \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)^{ni}$ – вес результата измерений для i -того превышения; H – вектор отметок пунктов;

- *двухкритериальная оптимизация* позволяет выполнять минимизацию сразу двух целевых функций (1) и

$$\Phi_2 H = \min \max(M), \quad (2)$$

где M – ошибка положения пункта, вычисляемая по обратной весовой матрице Q ;

- при *трёхкритериальной оптимизации* добавляется третья целевая функция

$$\Phi_3 H = \min \max(\mu M), \quad (3)$$

где $\mu = \sqrt{\frac{V_n^T P_n V_n}{r}}$, в которой V_n – вектор поправок в измерения после уравнивания; r – количество избыточных измерений.

Оценка точности выполняется по формулам из [3, 4]:

$$Q = F P_n^{-1} F^T; \quad (4)$$

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C, \quad (5)$$

где A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;

$$C = P_n n(n-1) |V_n|^{n-2}; \quad (6)$$

$$M = \mu \sqrt{Q_{jj}}. \quad (7)$$

На рисунке 1 приведена схема нивелирной сети для первого тестового примера из [1, с. 254].

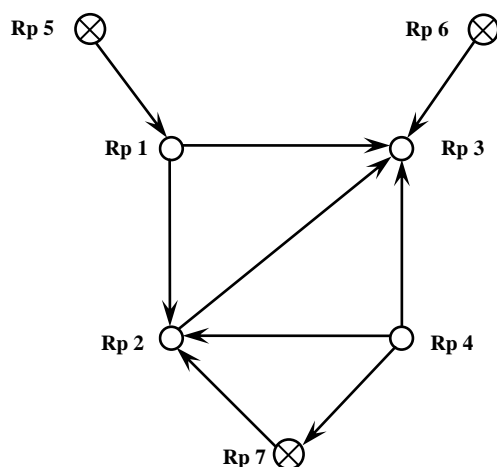


Рис. 1. Схема нивелирной сети

В таблице 1 даны сведения о первом тестовом примере (см. рис. 1): превышения h и веса превышений P .

Таблица 1

Сведения о первом тестовом примере

№ превышения	Номера пунктов		Превышение	Вес превышения
1	5	1	6.1250	1.2
2	1	3	8.3200	0.9
3	6	3	5.5800	1.1
4	1	2	1.3680	1.5
5	4	2	4.6940	0.9
6	4	3	11.6520	0.7
7	7	2	-0.9050	1.2
8	2	3	6.9440	1.1
9	4	7	5.5850	1.0

В таблице 2 представлены результаты уравнивания с использованием одного критерия (1), в таблице 3 применена двухкритериальная оптимизация (критерии (1) и (2)), в таблице 3 используется три критерия (1)...(3). Результаты анализа результатов уравнивания по данному примеру приведены ниже.

Таблица 2

Однокритериальная оптимизация первого тестового примера

Номер пункта	Свободная сеть (niva 49)		Нуль-свободная сеть (niva 49)	
	уравненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	средняя квадратическая ошибка отметки
1	189.6310	.0073	-.7493	.0042
2	190.9996	.0092	.6193	.0036
3	197.9500	.0096	7.5697	.0039
4	186.3067	.0105	-4.0736	.0049
6	192.3700	.0122	1.9897	.0075
7	191.8987	.0108	1.5184	.0055
5	183.5060	Исходный	-6.8743	.0075

Таблица 3

Двухкритериальная оптимизация первого тестового примера

Номер пункта	Свободная сеть (niva 44)		Нуль-свободная сеть (niva 45)	
	уровненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	уровненные отметки
1	189.6310	.0011	-.7488	.0032
2	190.9999	.0037	.6194	.0033
3	197.9493	.0054	7.5711	.0048
4	186.3061	.0063	-4.0761	.0054
6	192.3693	.0065	1.9911	.0048
7	191.8978	.0066	1.5170	.0061
5	183.5060	Исходный	-6.8738	.0036

Таблица 4

Трехкритериальная оптимизация первого тестового примера

Номер пункта	Свободная сеть (niva 46)		Нуль-свободная сеть (niva 47)	
	уровненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	уровненные отметки
1	189.6310	.0008	-.7490	.0029
2	191.0000	.0036	.6199	.0033
3	197.9491	.0056	7.5696	.0043
4	186.3058	.0061	-4.0741	.0049
6	192.3691	.0065	1.9896	.0048
7	191.8982	.0066	1.5181	.0051
5	183.5060	Исходный	-6.8740	.0038

Второй тестовый пример (рис. 2), опубликованный в [2], обработан аналогично первому тестовому примеру (табл. 5 – 7). Сведения о результатах измерений для этого примера опубликованы в [4].

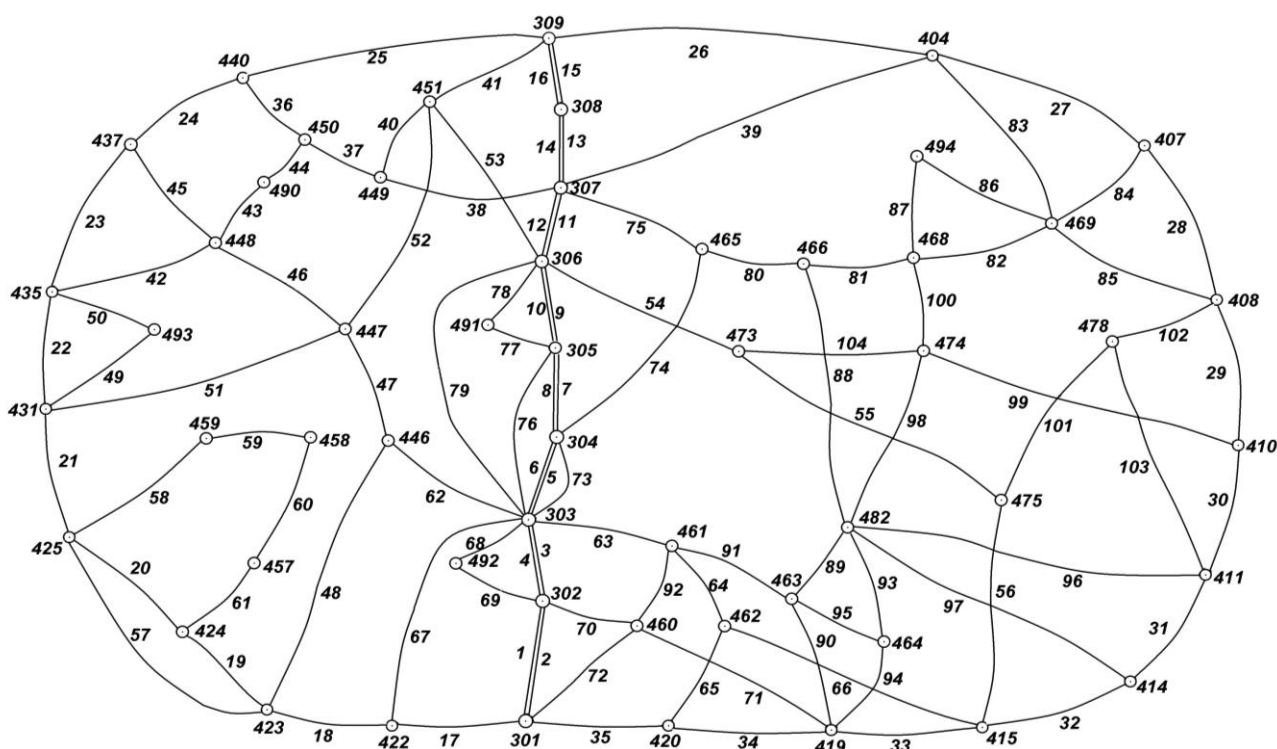


Рис. 2. Второй тестовый пример

Таблица 5

Однокритериальная оптимизация второго тестового примера

Номер пункта	Свободная сеть (niva 49)		Нуль-свободная сеть (niva 49)	
	уровненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	средняя квадратическая ошибка отметки
1	2	3	4	5
404	307.9707	.0271	1.9708	.0178
407	314.1354	.0271	8.1355	.0184
408	311.6256	.0256	5.6258	.0167
410	311.1732	.0237	5.1734	.0162
411	313.3182	.0231	7.3184	.0160
414	308.8792	.0207	2.8794	.0154
415	305.6250	.0184	–.3748	.0138
419	304.9093	.0135	–1.0906	.0137
420	314.5474	.0132	8.5476	.0143
422	301.6254	.0132	–4.3745	.0149
423	307.6724	.0177	1.6726	.0156
424	302.4508	.0214	–3.5490	.0177
425	295.6148	.0210	–10.3851	.0165
431	293.6135	.0244	–12.3863	.0176
435	303.5667	.0254	–2.4332	.0171
437	297.5983	.0264	–8.4015	.0174
440	299.9477	.0270	–6.0521	.0174
446	298.2116	.0189	–7.7882	.0182
447	299.7925	.0274	–6.2073	.0184
448	299.0582	.0261	–6.9417	.0167
449	299.9150	.0256	–6.0849	.0152
450	300.8672	.0262	–5.1327	.0162
451	306.4263	.0250	.4265	.0143
457	300.6438	.0348	–5.3561	.0314
458	296.5238	.0300	–9.4761	.0262
459	295.5008	.0267	–10.4991	.0227
460	305.1978	.0108	–.8021	.0152
461	311.6665	.0165	5.6666	.0162
462	314.1288	.0160	8.1289	.0149
463	313.3570	.0179	7.3571	.0157
464	309.4103	.0176	3.4104	.0155
465	303.4972	.0300	–2.5027	.0256
466	316.6532	.0260	10.6533	.0212
468	308.4594	.0300	2.4595	.0219
469	310.9574	.0271	4.9575	.0181
473	317.2155	.0228	11.2156	.0146
474	319.2709	.0228	13.2710	.0155
475	315.3141	.0218	9.3142	.0152
478	316.1897	.0254	10.1898	.0176
482	314.6522	.0197	8.6523	.0139
490	300.3691	.0278	–5.6308	.0188
491	303.2152	.0257	–2.7846	.0164
492	305.6319	.0142	–.3680	.0154
493	299.9018	.0270	–6.0981	.0200
494	315.4874	.0300	9.4875	.0219
302	300.6333	.0144	–5.3666	.0159
303	309.8165	.0137	3.8166	.0146
304	303.5862	.0350	–2.4137	.0312
305	305.1302	.0257	–.8696	.0165
306	302.7662	.0251	–3.2336	.0156
307	303.6210	.0284	–2.3789	.0193
308	304.4597	.0274	–1.5401	.0179
309	302.1917	.0270	–3.8081	.0172
301	300.0000	Исходный	–5.9999	.0154

Таблица 6

Двухкритериальная оптимизация второго тестового примера

Номер пункта	Свободная сеть (niva 44)		Нуль-свободная сеть (niva 45)	
	уровненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	средняя квадратическая ошибка отметки
1	2	3	4	5
404	307.9695	.0215	1.9717	.0139
407	314.1315	.0213	8.1331	.0151
408	311.6218	.0195	5.6239	.0125
410	311.1679	.0225	5.1730	.0152
411	313.3183	.0213	7.3187	.0149
414	308.8749	.0167	2.8778	.0113
415	305.6206	.0155	–.3774	.0107
419	304.9077	.0108	–1.0883	.0133
420	314.5471	.0103	8.5501	.0142
422	301.6260	.0127	–4.3719	.0150
423	307.6730	.0132	1.6753	.0126
424	302.4507	.0146	–3.5468	.0128
425	295.6146	.0144	–10.3831	.0123
431	293.6118	.0161	–12.3857	.0128
435	303.5651	.0175	–2.4322	.0129
437	297.5981	.0205	–8.4002	.0151
440	299.9439	.0210	–6.0524	.0151
446	298.2123	.0140	–7.7856	.0140
447	299.7902	.0215	–6.2077	.0147
448	299.0564	.0199	–6.9410	.0133
449	299.9109	.0197	–6.0864	.0120
450	300.8617	.0206	–5.1344	.0127
451	306.4224	.0192	.4253	.0116
457	300.6436	.0180	–5.3541	.0126
458	296.5236	.0176	–9.4741	.0126
459	295.5006	.0155	–10.4971	.0125
460	305.1973	.0083	–.7993	.0135
461	311.6658	.0190	5.6683	.0150
462	314.1256	.0171	8.1279	.0138
463	313.3511	.0201	7.3561	.0153
464	309.4068	.0157	3.4104	.0143
465	303.4922	.0187	–2.5034	.0114
466	316.6482	.0172	10.6526	.0113
468	308.4558	.0225	2.4576	.0153
469	310.9538	.0211	4.9556	.0132
473	317.2107	.0183	11.2138	.0125
474	319.2664	.0203	13.2696	.0146
475	315.3104	.0161	9.3122	.0106
478	316.1868	.0197	10.1880	.0140
482	314.6472	.0167	8.6516	.0113
490	300.3641	.0225	–5.6317	.0153
491	303.2113	.0200	–2.7858	.0133
492	305.6326	.0131	–.3658	.0132
493	299.8999	.0178	–6.0975	.0145
494	315.4838	.0225	9.4856	.0153
302	300.6339	.0126	–5.3645	.0133
303	309.8173	.0135	3.8192	.0127
304	303.5812	.0203	–2.4144	.0125
305	305.1263	.0203	–.8708	.0135
306	302.7623	.0199	–3.2348	.0132
307	303.6175	.0201	–2.3806	.0132
308	304.4550	.0218	–1.5422	.0153
309	302.1870	.0218	–3.8102	.0153
301	300.0000	Исходный	–5.9981	.0152

Таблица 7

Трехкритериальная оптимизация второго тестового примера

Номер пункта	Свободная сеть (niva 46)		Нуль-свободная сеть (niva 47)	
	уровненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	средняя квадратическая ошибка отметки
1	2	3	4	5
404	307.9690	.0200	1.9715	.0136
407	314.1307	.0206	8.1330	.0145
408	311.6208	.0190	5.6233	.0125
410	311.1679	.0206	5.1723	.0144
411	313.3162	.0196	7.3186	.0145
414	308.8736	.0169	2.8776	.0118
415	305.6198	.0161	–.3765	.0106
419	304.9080	.0099	–1.0884	.0130
420	314.5475	.0094	8.5502	.0135
422	301.6260	.0142	–4.3721	.0148
423	307.6731	.0136	1.6753	.0122
424	302.4511	.0149	–3.5466	.0127
425	295.6149	.0146	–10.3828	.0122
431	293.6125	.0160	–12.3844	.0128
435	303.5660	.0171	–2.4312	.0131
437	297.6000	.0203	–8.3985	.0149
440	299.9442	.0203	–6.0524	.0144
446	298.2122	.0135	–7.7855	.0124
447	299.7896	.0199	–6.2064	.0149
448	299.0561	.0186	–6.9400	.0134
449	299.9098	.0184	–6.0862	.0116
450	300.8616	.0190	–5.1348	.0127
451	306.4210	.0182	.4252	.0115
457	300.6439	.0189	–5.3538	.0131
458	296.5239	.0173	–9.4738	.0130
459	295.5009	.0158	–10.4968	.0128
460	305.1976	.0084	–.8005	.0137
461	311.6650	.0195	5.6672	.0146
462	314.1236	.0181	8.1282	.0126
463	313.3507	.0205	7.3568	.0150
464	309.4065	.0156	3.4107	.0140
465	303.4910	.0181	–2.5044	.0117
466	316.6470	.0173	10.6516	.0116
468	308.4542	.0208	2.4574	.0149
469	310.9522	.0200	4.9554	.0133
473	317.2102	.0173	11.2141	.0128
474	319.2644	.0198	13.2691	.0149
475	315.3096	.0162	9.3126	.0108
478	316.1839	.0196	10.1865	.0142
482	314.6460	.0170	8.6506	.0116
490	300.3639	.0206	–5.6319	.0149
491	303.2102	.0187	–2.7860	.0131
492	305.6326	.0126	–.3654	.0127
493	299.9009	.0173	–6.0959	.0143
494	315.4822	.0208	9.4854	.0149
302	300.6338	.0121	–5.3643	.0132
303	309.8175	.0131	3.8193	.0124
304	303.5800	.0193	–2.4154	.0126
305	305.1252	.0190	–.8710	.0133
306	302.7612	.0186	–3.2350	.0131
307	303.6168	.0192	–2.3797	.0127
308	304.4533	.0204	–1.5425	.0149
309	302.1853	.0204	–3.8105	.0149
301	300.0000	Исходный	–5.9994	.0150

По данным таблиц 2...4 для первого тестового примера можно сделать следующие **выводы**:

1) средняя квадратическая ошибка высотного положения пункта 7 для свободных нивелирных сетей, опирающихся на один исходный пункт, оказалась наилучшей для двух- и трехкритериальных алгоритмов и уменьшилась в 2 раза;

2) средняя квадратическая ошибка высотного положения пункта 7 для нуль-свободных нивелирных сетей, не содержащих исходных пунктов, оказалась наилучшей для трехкритериального алгоритма и уменьшилась в 1,5 раза;

3) по сравнению с однокритериальной оптимизацией отметки пунктов изменились на 0,9 мм для свободной сети и на 2,5 мм для нуль-свободной сети.

По данным таблиц 5...7 для второго тестового примера можно сделать следующие **выводы**:

1) средняя квадратическая ошибка высотного положения для свободных нивелирных сетей оказалась наилучшей для двухкритериального алгоритма в трех случаях (для пунктов 410, 468 и 494), а в случае трехкритериальной оптимизации в двух случаях (для пунктов 468 и 494) оказалась наименьшей из всех результатов вычислений и уменьшилась в 1,7 раза;

2) средняя квадратическая ошибка высотного положения для нуль-свободных нивелирных сетей оказалась наилучшей для трехкритериального случая (см. табл. 7 пункты 463 и 301) и уменьшилась в 2 раза;

3) по сравнению с однокритериальной оптимизацией отметки пунктов изменились на 5 мм для свободной сети и на 3 мм для нуль-свободной сети.

В заключение отметим, что в нашем частном случае можно перейти от трехкритериальной оптимизации к двухкритериальной, применив следующую формулу:

$$\Phi_2 H = \min \max[(1+\mu)M], \quad (8)$$

что приведет к аналогичным результатам уравнивания, но только в этом частном случае, когда стало возможно объединение формул (2) и (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев; под ред. В.Д. Большакова. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
2. Дьяков, Б.Н. О контроле, поиске и учете грубых ошибок измерений / Б.Н. Дьяков, М.П. Рудникова // Геодезия и картография. – 1997. – № 6. – С. 21 – 24.
3. Мицкевич, В.И. Основы многокритериального уравнивания геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.В. Субботенко, В.В. Ялтыхов. – Новополюцк: ПГУ, 2008. – 127 с.
4. Линейная многокритериальная оптимизация тестовых примеров нивелирных геодезических сетей / П.М. Левданский [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2009. – № 12. – С. 121 – 127.

Поступила 15.04.2011

EXPERIENCE OF APPLICATION LINEAR THREE-CRITERIA ADJUSTMENT OF LEVELLING GEODETIC NETWORKS

V. YALTYHOV

Application of multi-criteria adjustment of geodetic networks (MC) is initiated in 1999. The theory of the method is developed under professor Mitskevich's leadership and is fully presented for the case of two-criterion adjustment. Since 2010 in order to receive even more significant affect of MC method three-criterion optimization versus two-criterion method is started to be used for adjustment of plane and leveling geodetic networks. Its affectivity is practically proved for networks on plane. Advantages of new method of adjustment are studied in the present paper for two test examples of leveling geodetic networks. Research is conducted using six new software packages: niva 44 – niva 49. Niva 44 is upgraded what led to corrected results of adjustment.